4. Lineares Kraftgesetz

Die Elongation einer harmonischen Schwingung lässt sich durch eine Sinus-Funktion beschreiben.
Für die Geschwindigkeit v(t) bzw. die Beschleunigung a(t) ergeben sich durch Ableitung:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t) \;\Rightarrow\; v(t) = \dot{y}(t) = A\omega \cdot \cos(\omega t) \;\Rightarrow\; a(t) = \ddot{y}(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$

Zwischen der Beschleunigung a(t) und der Elongation y(t) besteht also der Zusammenhang:

$$\boxed{a(t) = -\omega^2 \cdot y(t) \quad \text{bzw.} \quad a(t) \sim -y(t)}$$

Multipliziert man mit der Masse m des schwingenden Körpers, so ergibt sich wegen F = ma:

$$\boxed{F(t) = -\,m\omega^2 \cdot y(t) \quad \text{bzw.} \quad F(t) = -D \cdot y(t) \qquad \text{mit } D = m\omega^2}$$

Dieser Zusammenhang wird als **lineares Kraftgesetz** bezeichnet:
Der Betrag der rücktreibenden Kraft $\vec{F}_{Rü}$ ist direkt proportional zur Auslenkung y.
Die Proportionalitätskonstante $D = m\omega^2$ heißt in diesem Kontext **Richtgröße D** der Schwingung.

Weil $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ergibt sich für die Periodendauer T : $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$

T hängt nur von der Masse m und der Richtgröße D der Schwingung ab, nicht von der Amplitude.

5. Energieerhaltung

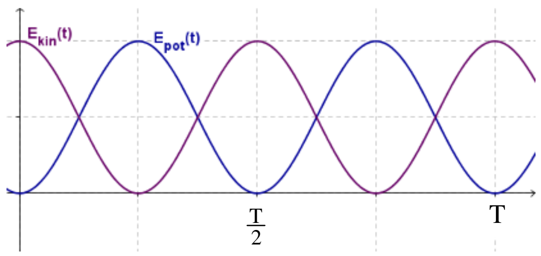
Die Geschwindigkeit $v(t) = A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ bewirkt eine Zeitabhängigkeit der kinetischen Energie $E_{kin}(t)$

$$\boxed{E_{kin}(t) = \tfrac{1}{2}mv^2(t) = \tfrac{1}{2}\, mA^2\omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)}$$

Weil für alle harmonischen Schwingungen das lineare Kraftgesetz mit $F_{res} = F_{Rü}$ gilt, besitzt jedes harmonisch schwingende System auch eine **potentielle Energie E_{pot} der Schwingung** analog zur Spannenergie einer Feder, die dem selben Kraftgesetz folgt.

$$\boxed{E_{pot}(t) = \tfrac{1}{2}Dx^2(t) = \tfrac{1}{2}\, DA^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \tfrac{1}{2}\, mA^2\omega^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0)} \qquad (D = m\omega^2)$$

Damit ergibt sich für die Summe beider Energien:
$E_{ges}(t) = E_{pot}(t) + E_{kin}(t) = \tfrac{1}{2}\, mA^2\omega^2 \cdot [\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)] = \tfrac{1}{2}\, mA^2\omega^2 = \tfrac{1}{2}\, m\,(v_{max})^2$,
weil der Ausdruck in den eckigen Klammern für alle Zeitpunkte t gleich 1 ist (trigonometr. Pythagoras).



Für harmonische Schwingungen gilt der Energieerhaltungssatz:

$$\boxed{E_{ges}(t) = \text{konstant} = E_{kin,\,max} = E_{pot,\,max}}$$

Energieerhaltung gilt nicht nur zu jedem Zeitpunkt, sondern auch bei jeder Elongation x.

$E_{pot}(x) = \tfrac{1}{2}\, Dx^2$

Für $E_{kin}(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} E_{kin}(x) &= E_{pot,\,max} - E_{pot}(x) \\ &= \tfrac{1}{2}DA^2 - \tfrac{1}{2}Dx^2 \\ &= \tfrac{1}{2}D(A^2 - x^2) \end{aligned}$$